Title	ある種の非線型方程式の閉軌道について (常微分方程式と非線形力学)
Author(s)	佐藤, 祐吉
Citation	数理解析研究所講究録 (1971), 113: 28-38
Issue Date	1971-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/106412
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
113巻 1971年 28-38

ある種の非線型方程式の閉軌道について

埼玉大 理工 佐藤祐吉

2階の微分方程式

(1) $$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)$$

の周期解の存在について考える。

ここで $f(x)$, $g(x)$ に次の条件をおく。

(i) $f(x)$ は連続で

$$f(x) < 0 \quad , \quad \beta_2 < x < \beta_1$$

$$f(x) > 0 \quad , \quad x < \beta_2 \text{ 又は } x > \beta_1$$

(ii) $g(x)$ は Lipschitzian である。更に

$$g(x) > 0 \quad , \quad x < \alpha \text{ 又は } x > 0$$

$$g(x) < 0 \quad , \quad \alpha < x < 0$$

(iii) $g(x)$ は $x = \alpha, 0$ で微分可能で

$$g'(\alpha) < 0 \quad , \quad g'(0) \geqq 0$$

Sansone-Conti [1] は $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$ の場合に，周期解が存在する十分条件を与えている。

我々は最初に周期解が存在しない場合を考える。

定理 1. 条件(i)～(iii) と更に (a). $\beta_2 < \alpha$, $0 < \beta_1$,

(b). 『$\int_0^{\beta_1} g(s)\,ds \geqq \int_0^{\alpha} g(s)\,ds$』であるか又は

『$\int_0^{x_1} g(s)\,ds = \int_0^{x_2} g(s)\,ds$, $\alpha < x_1 < x_2$ となる x_1, x_2 に対して

(2) $$\frac{g(x_1)}{f(x_1)} < \frac{g(x_2)}{f(x_2)}$$』

このとき，(1) は定数を除いて，周期解を持たない。

証明. (1) と同値な system

(3) $$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -f(x)y - g(x) \end{aligned}$$

を考える。この system は，任意の初期値に対する解は唯1つであり，又(3)の limit cycle が(1)の周期解と 1－1 に対応する。したがって(3)の limit cycle が存在しないことを示す。

(3)の critical pt. は $(\alpha, 0)$ と $(0, 0)$ である。

$(\alpha, 0)$ は saddle pt. で，その index は -1 である。

$(0,0)$はunstable critical pt.でindexは$+1$である。したがって(3)のlimit cycleが存在するならば，$(0,0)$のみを内部に含まなければならない。

今，(3)のlimit cycleが存在したと仮定し，その一つを$\Gamma=(x(t),y(t))$で表わす．(3)より明らかに，Γはx軸と丁度2点で交わる．それを$E_1=(\xi_1,0)$，$E_2=(\xi_2,0)$（$\xi_1>\xi_2$）とする．又$(\alpha,0)$を内部に含まないので，直線$x=\alpha$とΓは交わらない。したがって

$$\alpha<\xi_2<0<\xi_1$$

更に$\beta_1<\xi_1$となる。換言すれば，Γは直線$x=\beta_1$と2点で交わらねばならぬ。実際，$\xi_1\leqq\beta_1$と仮定すれば

$$G(x)=\int_0^x g(s)ds$$

$$\lambda(x,y)=\frac{1}{2}y^2+G(x)$$

とおき，(3)の任意の軌道に沿って$\lambda(x,y)$をtで微分すると

$$\frac{d\lambda(x,y)}{dt}=-y^2f(x) \tag{4}$$

Γ上の任意の2点A，Bにおける$\lambda(x,y)$の値を$\lambda(A)$,$\lambda(B)$で表わすと

$$\lambda(A)-\lambda(B)=\int_{t_B}^{t_A}-y^2f(x)dt$$

$\Gamma = (x(t), y(t))$ の周期を T とする。仮定により

$\alpha < \xi_2 \leqq x(t) \leqq \xi_1 \leqq \beta_1 \ (0 \leqq t \leqq T)$ であるので $f(x(t)) \leqq 0$

従って

$$0 = \lambda(A) - \lambda(A) = \int_0^T -y^2(t) f(x(t))\,dt > 0$$

となり矛盾である。

今、図1の様に 直線 $x = \beta_1$ と Γ の交点を A, B とする。

(4)より明らかに、$\lambda(x, y)$ は曲線 $\widehat{BE_2A}$ $\{\widehat{AE_1B}\}$ に沿って、単調増加{減少}であるから

$$\lambda(B) < \lambda(E_2) < \lambda(A)$$

$$\lambda(B) < \lambda(E_1) < \lambda(A)$$

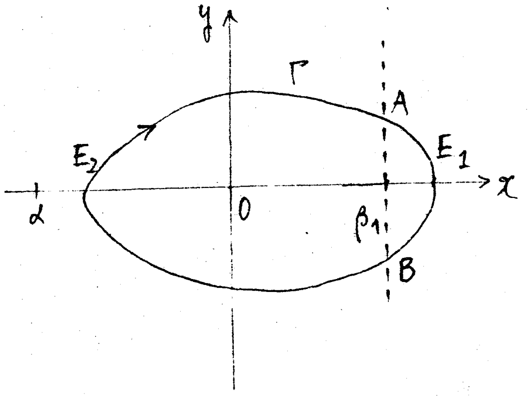


図. 1

Γ 上の $\widehat{BE_2A}$ に対応する λ, y 面上の曲線を $y_{\mathrm{I}}(\lambda)$, 同じく $\widehat{AE_1B}$ に対応するものを $y_{\mathrm{II}}(\lambda)$ とすると，これらは一価連続函数である。 更に $\lambda(A) = a$, $\lambda(B) = b$ とおくとき

(5) $$\frac{dy(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{y} + \frac{g(x)}{f(x)y^2}$$

であるから

$$\lim_{\substack{\lambda \to a \\ \lambda \to b}} y'_{\mathrm{I}}(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\substack{\lambda \to a \\ \lambda \to b}} y'_{\mathrm{II}}(\lambda) = +\infty \quad \left(' = \frac{d}{d\lambda}\right)$$

λ が a に十分近い所では

$$y_{\mathrm{I}}(\lambda) > y_{\mathrm{II}}(\lambda) \quad , \quad y_{\mathrm{I}}(a) = y_{\mathrm{II}}(a)$$

b の近くでは

$$y_{\mathrm{I}}(\lambda) < y_{\mathrm{II}}(\lambda)$$

$$y_{\mathrm{I}}(b) = y_{\mathrm{II}}(b)$$

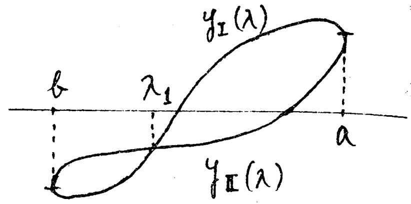


図. 2

従って $y_{\mathrm{I}}(\lambda)$ と $y_{\mathrm{II}}(\lambda)$ とは $\lambda = a,\ b$ 以外で交わらなければならぬ.

$$\bar{\lambda} = \max\{\lambda ;\ y_{\mathrm{I}}(\lambda) = y_{\mathrm{II}}(\lambda),\ b < \lambda < a\}$$

とおき, $y_{\mathrm{I}}(\bar{\lambda}) \geqq 0$ のとき, $\lambda_1 = \bar{\lambda}$ とおき, < 0 のとき

$$\lambda_1 = \min\{\lambda ;\ y_{\mathrm{I}}(\lambda) = y_{\mathrm{II}}(\lambda)\ \ b < \lambda < a\}$$

とおく.

λ_1 に対応する Γ 上の点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ $(x_1 < x_2)$ で表わすと, $y_1 = y_{\mathrm{I}}(\lambda_1) = y_{\mathrm{II}}(\lambda_1) = y_2$ である。

$y_{\mathrm{I}}(\lambda_1) \neq 0$ の場合を考える.

$$y_{\mathrm{I}}'(\lambda_1) \geqq y_{\mathrm{II}}'(\lambda_1)$$

であるから. (5) より

$$(6) \qquad \frac{g(x_1)}{f(x_1)} \geqq \frac{g(x_2)}{f(x_2)}$$

一方. $\lambda_1 = \frac{1}{2} y_1^2 + G(x_1) = \frac{1}{2} y_2^2 + G(x_2)$ より

$$(7) \qquad G(x_1) = G(x_2)$$

$G(x)$ は $0 < x$ $(\alpha < x < 0)$ で増加(減少)函数であるので

$\alpha < x_1 < 0$ 。

$G(\alpha) \leqq G(\beta_1)$ の場合には

$$G(x_1) < G(\alpha) \leqq G(\beta_1) < G(x_2)$$

これは(7)に反する。

$G(\alpha) > G(\beta_1)$ の場合には(6), (7) は条件(b)に反する。

$y_{I}(\lambda_1) = y_{II}(\lambda_1) = 0$ の場合

$\lambda_1 = \lambda(E_1) = \lambda(E_2)$, $y_{I}(\lambda) > y_{II}(\lambda) > 0$, $\lambda_1 < \lambda < a$

である。又、$f(x_i) \neq 0$, $g(x_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$ であるので、λが$\lambda(E_1)$の十分近くでは

$$y_{I}'(\lambda) < y_{II}'(\lambda)$$

となる。このことは又、$\lambda_1 < \lambda_2 < a$, $y_{I}(\lambda_2) = y_{II}(\lambda_2)$ となるλ_2が存在しなければならぬことを示す。これは矛盾である.

証明終り.

定理2. (i)〜(iii) と更に (a). $\beta_2 \leqq \alpha < \beta_1 < 0$,

(b). $G(\tilde{x}) = G(\underset{\sim}{x})$, $\alpha \leqq \tilde{x} < \underset{\sim}{x}$ ならば

$$\tilde{x} + \underset{\sim}{x} > 2\beta_1$$

(c). $\alpha < x_1 < \beta_1 < x_2 < \gamma$ なる x_1, x_2 に対して

$$f(x_1) + f(x_2) \geqq 2 f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

ここで $\gamma > 0$ は $G(\gamma) = G(\alpha)$

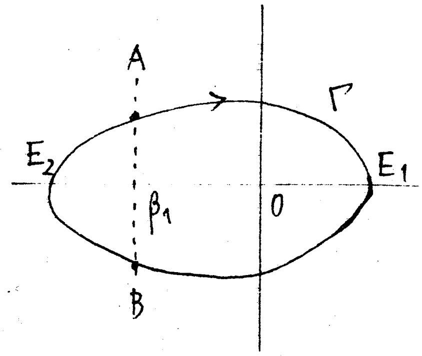
以上の条件の下で，(1)の周期解は存在しない。

証明．定理1と同様に(3)を考える。(3)の limit cycle Γ が存在すると仮定して，矛盾を導く。

E_1, E_2, A, B, $y_I(\lambda)$, $y_{II}(\lambda)$ を定理1と同様な意味で記号を用いると，

$$\lim_{\substack{\lambda \to a \\ \lambda \to b}} y_I'(\lambda) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{\lambda \to a \\ \lambda \to b}} y_{II}'(\lambda) = -\infty$$



図．3

であることに注意すると

$$y_I(\lambda) < y_{II}(\lambda) \qquad 1 \gg a - \lambda > 0$$

$$y_I(\lambda) > y_{II}(\lambda) \qquad 1 \gg \lambda - b > 0$$

を得る

λ_1，(x_i, y_i) $(i=1,2)$ 等も定理1と同様な記号として用いると

$$G(x_1) = G(x_2), \quad \xi_1 < x_1 < \beta_1, \quad 0 < x_2$$

従って，条件(i)，(a)，(b)より

$$f(x_1) + f(x_2) \geqq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$$

$$\therefore$$

$$-f(x_1) < f(x_2)$$

$y_{\mathrm{I}}(\lambda_1) \geqq 0$　の場合を考える。

xをλの函数と考え，Γが$\{x_1 \leqq x \leqq \beta_1,\ y \geqq 0\}$に含まれる部分に対応する函数を$x_{\mathrm{I}}(\lambda)$で，同様に、$\{\beta_1 \leqq x \leqq x_2,\ y \geqq 0\}$に含まれる部分に対応する函数を$x_{\mathrm{II}}(\lambda)$で表わすと，$x_{\mathrm{I}}(\lambda), x_{\mathrm{II}}(\lambda)$は一価連続函数となる。

λ_1の仮定により

$$y_{\mathrm{II}}(\lambda) > y_{\mathrm{I}}(\lambda) > 0, \quad \lambda_1 < \lambda < a$$

又，$0 < -f(x_1) < f(x_2)$ より　λ_1の十分近くでは

$$f(x_{\mathrm{II}}(\lambda)) > -f(x_{\mathrm{I}}(\lambda)) > 0$$

従って，λがλ_1の十分近くでは

(8). $$\frac{dx_{\mathrm{I}}(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{y(x_{\mathrm{I}})f(x_{\mathrm{I}})} > \frac{1}{y(x_{\mathrm{II}})f(x_{\mathrm{II}})} = -\frac{dx_{\mathrm{II}}(\lambda)}{d\lambda} > 0$$

一方，$x_1 + x_2 > 2\beta_1$ より

(9). $$\int_{\lambda_1}^{a} \frac{dx_{\mathrm{I}}(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda = \beta_1 - x_1 < x_2 - \beta_1 = \int_{\lambda_1}^{a} -\frac{dx_{\mathrm{II}}(\lambda)}{d\lambda}\,d\lambda$$

(8), (9)より，次の不等式を満足するλ_2が存在する。

(10). $$\frac{dx_{\mathrm{I}}(\lambda_2)}{d\lambda} = \frac{dx_{\mathrm{II}}(\lambda_2)}{d\lambda}, \quad \frac{dx_{\mathrm{I}}(\lambda)}{d\lambda} > -\frac{dx_{\mathrm{II}}(\lambda)}{d\lambda}, \quad \lambda_1 \leqq \lambda < \lambda_2$$

ところで、$0 < y_{\mathrm{I}}(\lambda_2) < y_{\mathrm{II}}(\lambda_2)$であるから

(11). $$-f(x_{\mathrm{I}}(\lambda_2)) > f(x_{\mathrm{II}}(\lambda_2))$$

(10) を積分することにより

$$x_{I}(\lambda_2) - x_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dx_{I}(\lambda)}{d\lambda}\, d\lambda$$

$$> \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} - \frac{dx_{II}(\lambda)}{d\lambda}\, d\lambda = x_2 - x_{II}(\lambda_2)$$

すなわち

$$x_{I}(\lambda_2) + x_{II}(\lambda_2) > 2\beta_1$$

一方．条件(c)の不等式より

$$-f(x_{I}(\lambda_2)) < f(x_{II}(\lambda_2))$$

が導かれる。これは(11)に反する。

$y_{I}(\lambda_1) < 0$ の場合も全く類似な方法で矛盾が導かれる。

証明終り．

定理3．(i)〜(iii) と (a)．$\beta_2 < 0 < \beta_1$

(b)．$G(\alpha) \leqq G(\delta_1)$　　$(\delta_1 > 0,\ \int_0^{\delta_1} f(\xi)d\xi = 0)$

(c)．$G(x_1) = G(x_2)$，$\alpha < x_1 < x_2$ ならば

$$\int_0^{x_1} f(\xi)d\xi < \int_0^{x_2} f(\xi)d\xi$$

以上の条件の下では．(1)の周期解は存在しない。

最後に周期解の存在する条件を求めてみる。

定理4．(i)〜(ii) と (a)．$\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$

(b). $^{\exists}w > 1$, $\alpha < {}^{\exists}x_1 < \beta_2$

(12). $$w^2(G(\alpha)-G(x_1)) \geqq G(\alpha)-G(\beta_2)$$

(13). $$2w\left(1+\frac{1}{\theta}\right)M \leqq \int_{x_1}^{\beta_2} f(x)\,dx$$

(c). $\lim_{x\to\infty} G(x) > M + \sqrt{2}\,(G(\alpha)-G(\beta_2))^{\frac{1}{2}}$

このとき、(1)は少なくとも1つ周期解を有する。

ここで $$M = \frac{\max\{G(\beta_1), G(\beta_2)\}}{(G(\alpha)-G(\beta_2))^{\frac{1}{2}}} + \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(s)\,ds$$

$$\theta = \frac{\sqrt{2}}{M}(G(\alpha)-G(\beta_2))^{\frac{1}{2}}$$

次に周期解が1つである条件は

定理5.(i)〜(iii), (a). $\alpha < \beta_2 < 0 < \beta_1$,

(b). $G(\beta_2) = G(\beta_1)$, (c). $f, g \in C^1$ であるとき, (1)は

定数を除いて、高々1つ周期解を持つ。

参考文献

[1]. Sansone-Conti ; Non-linear differential equations, Pergamon Press. (1964)

[2]. Sato, Y. ; On the existence of limit cycles of circuits containing one Esaki diode, Comment. Math. Univ. Sancti Pauli, 18 (1970)